2014年 東大数学 理系第3問①

(1) C_1とC_2が共有点を持つ

⇔ C_1とC_2を連立したxが、少なくとも1つの解を持つ

⇔ C_1とC_2が2次式なので、判別式をとるだけ

$y=-x^2+1$ かつ $y=(x-u)^2+u$ の連立方程式が

(判別式) $\geqq 0$ となればよい。

$$-x^2+1=(x-u)^2+u$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2ux+u^2+u-1=0 \quad \text{—①}$$

判別式をDとすると、$D\geqq 0$となればよい。

$$D/4=(-u)^2-2\cdot(u^2+u-1)$$

$$=-u^2-2u+2\geqq 0$$

$$\Leftrightarrow -1-\sqrt{3}\leqq u\leqq -1+\sqrt{3}$$

よって、$a=-1-\sqrt{3}$　$b=-1+\sqrt{3}$ //

(2) ①の解を、x_1 x_2とする。

x_1 x_2は、C_1とC_2の共有点のx座標なので、

C_1に代入　　C_2に代入

$$\begin{cases} y_1=-x_1^2+1 \\ y_2=-x_2^2+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=(x_1-u)^2+u \\ y_2=(x_2-u)^2+u \end{cases}$$

方針1　　方針2

方針1

$$2|x_1y_2-x_2y_1|$$

$$=2|x_1(-x_2^2+1)-x_2(-x_1^2+1)|$$

$$=2|-x_1x_2^2+x_1+x_1^2x_2-x_2|$$

$$=2|x_1x_2(x_1-x_2)+(x_1-x_2)|$$

$$=2|x_1-x_2|\,(x_1x_2+1)$$

方針2

$$2|x_1y_2-x_2y_1|$$

$$=2|x_1\{(x_2-u)^2+u\}-x_2\{(x_1-u)^2+u\}|$$

$$=2|x_1\{(x_2^2-2ux_2+u^2)+u\}-x_2\{(x_1^2-2ux_1+u^2+u\}|$$

$$=2|x_1x_2^2-\cancel{2ux_1x_2}+u^2x_1+ux_1-x_1^2x_2+\cancel{2ux_1x_2}-u^2x_2-ux_2|$$

$$=2|x_1x_2(x_2-x_1)+u^2(x_1-x_2)+u(x_1-x_2)|$$

$$=2|x_1-x_2|\cdot|-x_1x_2+u^2+u|$$

①で解と係数の関係を使うと、

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{-2u}{2}=u & \text{—②} \\ x_1x_2=\dfrac{u^2+u-1}{2} & \text{—③} \end{cases}$$

$u^2+u=2x_1x_2+1$

よって $2|x_1-x_2|\cdot|-x_1x_2+(2x_1x_2+1)|$

$$=2|x_1-x_2|\cdot|x_1x_2+1|$$ 方針1と同じ結果

方針A x_1とx_2を、解の公式で求め、代入

①を解の公式で解くと、

$$x=\frac{-(-u)\pm\sqrt{(-u)^2-2(u^2+u-1)}}{2}=\frac{u\pm\sqrt{-u^2-2u+2}}{2}$$ より

$$x_1=\frac{u+\sqrt{-u^2-2u+2}}{2} \qquad x_2=\frac{u-\sqrt{-u^2-2u+2}}{2}$$ とする

$2|x_1y_2-x_2y_1|$に絶対値がついてるので、x_1とx_2の大小はどちらでも可

$$2|x_1y_2-x_2y_1|$$

$$=2|x_1-x_2|\cdot|x_1x_2+1|$$

$$=2\left|\frac{u+\sqrt{-u^2-2u+2}}{2}-\frac{u-\sqrt{-u^2-2u+2}}{2}\right|\cdot\left|\frac{u+\sqrt{-u^2-2u+2}}{2}\cdot\frac{u-\sqrt{-u^2-2u+2}}{2}+1\right|$$

$$=\cdots=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$$

方針B x_1-x_2とx_1x_2を解と係数の関係で求める。

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=u^2-4\cdot\frac{u^2+u-1}{2}$$

$$=-u^2-2u+2$$ なので、

②と③

$$2|x_1-x_2|\cdot|x_1x_2+1|$$

$$=2\sqrt{-u^2-2u+2}\cdot\left(\frac{u^2+u-1}{2}+1\right)$$

$$=\cdots=(u^2+u-1)\cdot\sqrt{-u^2-2u+2}$$ 方針Aと同じ結果